1.3　三角形の内角の和はなぜ180°なのか？（数学分野）

(1) 研究開発の概要

「三角形の内角の和は１８０°」は、ユークリッド幾何でしか成立せず、非ユークリッド幾何においては、内角の和が１８０°を超えることも、１８０°に足りないことも起こりうることを理解させる。

(2) 仮説（ねらい、目標）

中学で学習した事柄をもう一度考え直すことにより、数学の深い理論につながる道の入り口を体験させる。

(3) 研究開発の経緯

ア　準備

(ｱ) 事前打ち合わせ

日程・内容等の事前打ち合わせをメールにより行った。

(ｲ) 事前指導

中学校で行った、三角形の内角の和は２直角であることと、正弦定理・余弦定理を準備した。

イ　事後指導

事後アンケートおよび評価テストを実施することにより、事後指導とした。

(4) 研究の方法および内容

ア　対象生徒

２年生理系５クラス（２０９名）

イ　実施日時

平成２１年７月１３日（月）１２時５５分～１５時１５分（２クラス）

平成２１年７月１６日（木）　８時４０分～１１時００分（３クラス）

ウ　実施場所

本校　視聴覚教室

エ　講師

椙山女学園大学教育学部　　浪川　幸彦　教授　（名古屋大学　名誉教授）

オ　演題

「三角形の内角の和はなぜ１８０°なのか」

(5) 実施内容

ア　ユークリッド幾何による、三角形の内角の和が１８０°の証明

三角形ＡＢＣの外角Ｃにおいて、辺ＡＢの平行線を引くことにより証明できる。

イ　ユークリッドの公準

５番目の「平行線の公準」が、他の公準と比べて非常に複雑であること。

ウ　補助定理

△ＡＢＣがあると、$\triangle A_1B_1C_1$で、内角の和が等しくかつ、$2\angle A_1 \leqq \angle A$ となるものが存在する。

エ　三角形の内角の和が１８０°以下になる定理の証明

補助定理を繰り返し使うことにより、証明ができる。

オ　非ユークリッド幾何での三角形の内角の和

非ユークリッド幾何では内角の和は、１８０°より大きくなったり小さくなったりする。

カ　球面上における直線

直線は大円。球面上の三角形は２つでき、２つのペアで１つとする。

平行線は存在しない。三角形の内角の和は、２直角を超える。

キ　ハリオットの定理

半径ｒの球面上で角 α、β、γ の三角形の面積は　$r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$

ク　まとめ・発展

球面幾何とユークリッド幾何がつながっていること。

平面が平らだから三角形の内角の和が１８０°になる。

なぜ球面上で大円を直線と見なしてよいか。

挨拶をされる浪川先生

講演される浪川先生

(6) 検証（成果と反省）

ア　事後アンケート

(ｱ) 結果について（抜粋）

問１　講義で取り扱った内容は高度であったと思いますか？

①	そう思う	４９．１％
②	どちらかといえばそう思う	３８．０％
③	どちらかといえばそう思わない	１０．５％
④	思わない	２．３％

問２　講義の内容は自分なりに理解できましたか？

①	理解できた	６．４％
②	どちらかといえば理解できた	２６．３％
③	どちらかといえば理解できなかった	４８．５％
④	理解できなかった	１８．７％

問３　数学が好きですか？

①	好き	２６．９％
②	どちらかといえば好き	５１．５％
③	どちらかといえば嫌い	１７．０％
④	嫌い	４．７％

問４　ＳＳＨや関係する取り組みをどう受け止めていますか？

①	関心を持っている	２７．６％
②	どちらかといえば関心を持っている	５６．５％
③	どちらかといえば関心を持っていない	１２．４％
④	関心を持っていない	３．５％

(ｲ) 生徒の感想から

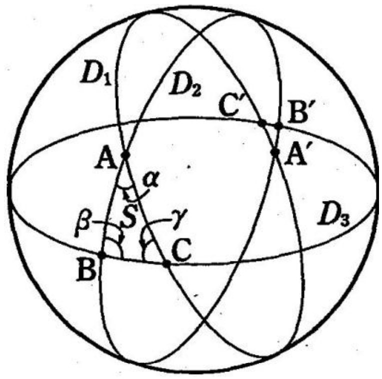
生徒からは満足度の高い感想が得られた。以下は抜粋である。

・サッケリの定理の証明方法に感心した。
・空間における三角形の内角の和という発想が面白いと思った。
・数学の考え方が航路計算に応用されていることに驚いた。
・簡単な公準だけから証明していくなんてすごいと思った。
・どうして？なんで？という精神がやはり重要なことに気づいた。
・幾何学は考えれば考えるほど奥深い学問である。
・球面上には二角形ができることに驚いた。
・非ユークリッド幾何において、極限をとるとユークリッド幾何になることに感動した。
・面積公式は美しかった。

イ　評価テスト

講演後、授業において評価テストを行った。以下が内容の概略である。

半径ｒの球面がある。球面と中心を通る平面との交わりを大円という。図のように
３つの大円D_1、D_2、D_3がA,B,C,A',B',C'で交差している。このとき、ＡＡ', ＢＢ', ＣＣ'は球の中心を通る。球面上の三角形△ＡＢＣを考える。$\alpha=\angle BAC$ を、D_2 を ＡＡ' を軸にして回転させ、辺ＡＢが辺ＡＣに重なる時の回転角とし、$0\leqq\alpha\leqq\pi$ にとる。同様に $\beta=\angle CBA$、$\gamma=\angle ACB$ を定義する。
D_1、D_2 で囲まれる球面上の４つの領域の中で、△ＡＢＣ と △A'B'C' をそれぞれ含む２つの領域の和集合を S_{12} とする。



(1)　球面の表面積を ｒ を用いて求めよ。(答えのみでよい)
(2)　S_{12} の面積を α、ｒ を用いて表せ。

S_{12}、S_{23}、S_{31} の共通部分が、△ＡＢＣ と △A'B'C' の和集合だから、
(3)　△ＡＢＣ の面積を Ｓ とするとき、Ｓ を α、β、γ、ｒ で求めよ。

ウ　課題

今回の講演ではかなりの生徒が難しいと感じながらも、強い興味を抱く事ができた。

高校数学と大学での数学は大きな隔たりがあるので、ＳＳＨ事業を通じて、少しでも狭められたらと思う。

講義の様子