やさしい t 検定

Excel を利用した t 検定①

1 データを入力する

＜例＞ビタミンＣの含有量の熱変化

K3 | 2.98

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	加熱なし	3.21	3.34	3.26	3.22	3.15	3.21	3.08	3.32	3.15	3.07	
3	加熱あり	2.84	2.97	2.91	3.02	3.05	2.91	2.92	3.04	2.96	2.98	
4												

（単位は$\times 10^{-3}$mol/l）

上の結果から，「加熱するとビタミンＣの含有量が減少する」と判断してよいでしょうか。平均は加熱ありの方が小さいですが，本当は差がほとんどないのに，たまたまこのような結果が出たということはないでしょうか。

こうした問題を解くために編み出されたのが「仮説検定」という方法です。仮説検定には様々な種類があり，その実験内容によって適切な検定方法が異なります。

今回の場合は２つの母集団の平均の比較をしたいので t 検定を行います。 t 検定にも様々な種類がありますが，今回は２つの母集団の分散が等しいとは限らないと考えて検定を行うことにします。この方法を Welch（ウェルチ）の t 検定といいます。

2 標本平均，不偏分散を計算する。

・標本平均・・・標本（得られたデータ）の平均

・不偏分散・・・母集団の分散の不偏推定量（標本の属する母集団の分散を推定したもの）

$\overline{X}$：加熱なしの場合の標本平均　$\overline{Y}$：加熱ありの場合の標本平均

μ_X：加熱なしの場合の母平均　μ_Y：加熱ありの場合の母平均

$\widehat{\sigma_X}^2$：加熱なしの場合の不偏分散　$\widehat{\sigma_Y}^2$：加熱ありの場合の不偏分散

※不偏分散の計算式　$\widehat{\sigma_X}^2=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2$，　$\widehat{\sigma_Y}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$　【データ数－１で割る】

標本分散の計算式　$\widehat{\sigma_X}^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2$，　$\widehat{\sigma_Y}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$　【データ数で割る】

つまり，（不偏分散）＝m/m-1（標本分散）

※Excel 上での関数　標本平均『＝AVERAGE(B2:K2)』　不偏分散『＝VAR(B2:K2)』

M3 | =VAR(B3:K3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平均	不偏分散
2	加熱なし	3.21	3.34	3.26	3.22	3.15	3.21	3.08	3.32	3.15	3.07	3.201	0.008277
3	加熱あり	2.84	2.97	2.91	3.02	3.05	2.91	2.92	3.04	2.96	2.98	2.96	0.0044

3 仮説検定の考え方

帰無仮説H_0：主張したいことの逆の仮説
対立仮説H_1：もともと主張したい仮説

←*「正しくない」と言いたい*

←*帰無仮説が「正しくない」と言うことで「正しいと」言える*

仮説$\mathrm{H_1}$「加熱するとビタミンＣの含有量が減少する」←*証明したい仮説*

ひっくり返す↓

仮説H_0「加熱してもビタミンＣの含有量は変わらない」←*その反対の仮説*

仮説を検証↓

仮説H_0は実験で得られたデータと矛盾する

↓

よって，仮説H_0は正しくない。つまり，仮説H_1は正しい。

4 帰無仮説H_0 ，対立仮説H_1を立てる。

帰無仮説H_0：含有量は加熱あり／なしで変わらない。$\mu_X = \mu_Y$
対立仮説H_1：加熱すると含有量が減少する。$\mu_X > \mu_Y$

→帰無仮説H_0が成り立つとして，計算を進めます。

片側検定で行い，有意水準は５％とします。

※有意水準α・・・仮説を検証するための判断基準（帰無仮説H_0を棄却する基準）

5 統計検定量T を求める。

$\boxed{2}$で求めた値，m = n = 10(データ数）を代入する。帰無仮説H_0より，$\mu_X - \mu_Y = 0$とします。

$$T = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right) - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma_X}^2}{m} + \frac{\widehat{\sigma_Y}^2}{n}}} = \boxed{(1) \quad\quad\quad\quad}$$

（小数第３位四捨五入）

J	K	L	M	N
9	10	平均	不偏分散	
3.15	3.07	3.201	0.008277	
2.96	2.98	2.96	0.0044	
	T =	=(L2-L3)/SQRT(M2/10+M3/10)		

$\boxed{6}$ 棄却域を設定する。

統計検定量T は帰無仮説H_0が正しいとすれば，自由度df のｔ分布にしたがいます。ただし，自由度df の値は次のように計算します。

$$df = \frac{\left(\frac{\widehat{\sigma_X}^2}{m} + \frac{\widehat{\sigma_Y}^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\widehat{\sigma_X}^2}{m}\right)^2}{m-1} + \frac{\left(\frac{\widehat{\sigma_Y}^2}{n}\right)^2}{n-1}} = \boxed{\text{(2)}} \rightarrow \boxed{\text{(3)}}$$

（小数第３位四捨五入）　　　（最も近い整数）

K	L	M	N	O
10	平均	不偏分散		
3.07	3.201	0.008277		
2.98	2.96	0.0044		
T =	6.768844033			
df=	=(M2/10+M3/10)^2/((M2)^2/900+(M3)^2/900)			

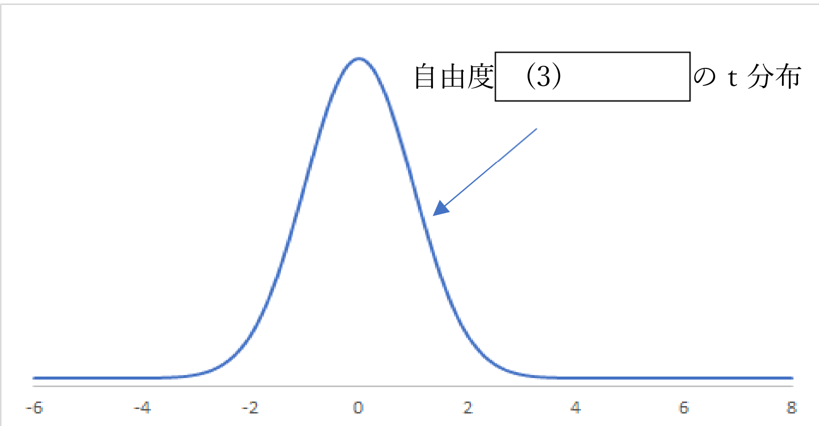
ｔ分布表（Ｐ７）により，自由度 $\boxed{\text{(3)}}$ のｔ分布の上側５％点は，$\boxed{\text{(4)}}$ です。これが棄却域の境界値になります。

$\boxed{7}$ 帰無仮説が正しいかどうかを検証する。$\boxed{\text{重要}}$

① 横軸上に（４）の値をプロットし，横軸に垂直に線分を引く。

② ①の線分，グラフ，横軸で囲まれた部分を塗る。これが棄却域である（斜線部分の確率は５％）。

③ 横軸に上（１）の値をプロットする。



棄却域に入る理由は以下の２つ

（Ａ）実験データから求めた$\bar{X}-\bar{Y}$が，たまたま滅多にないほど大きかったから。

（Ｂ）帰無仮説で仮定した$\mu_X - \mu_Y = 0$が，実際より小さかったから。

（＝実際は$\mu_X - \mu_Y > 0$だから）

→理由（Ａ）は滅多に起こらないので，仮説検定では（Ｂ）を採用します。

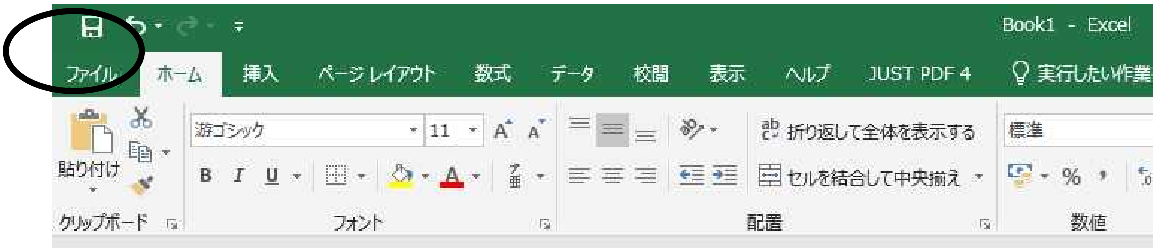
※ただし，５％の危険は含んでいます。

$\boxed{\text{(4)}} < \boxed{\text{(1)}}$

であるので，棄却域に含まれます。したがって，帰無仮説H_0は棄却され，対立仮説H_1が採択されます。すなわち，加熱なしの場合のビタミンＣの含有量と，加熱ありの場合のビタミンＣの含有量の平均には，有意な差があることがわかります。

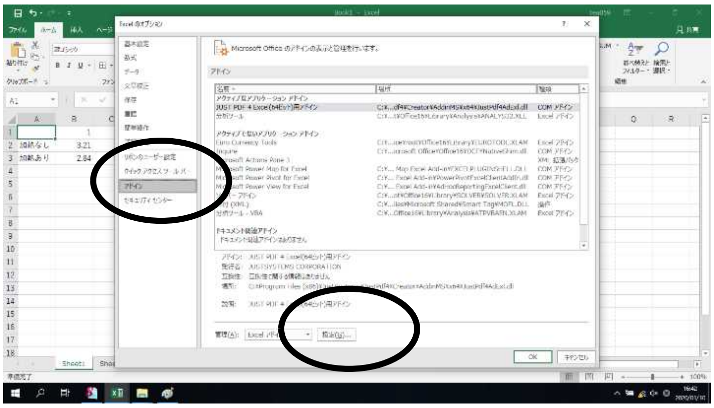
Excel を利用した t 検定②

1 分析ツールを読み込む

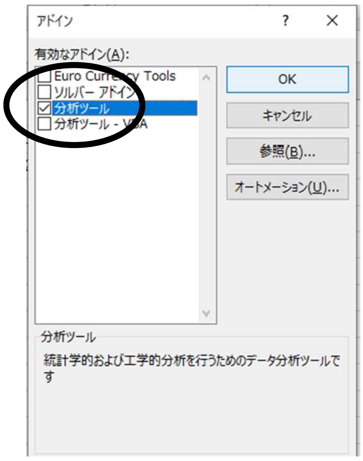


①［ファイル］タブをクリック

②［オプション］をクリック

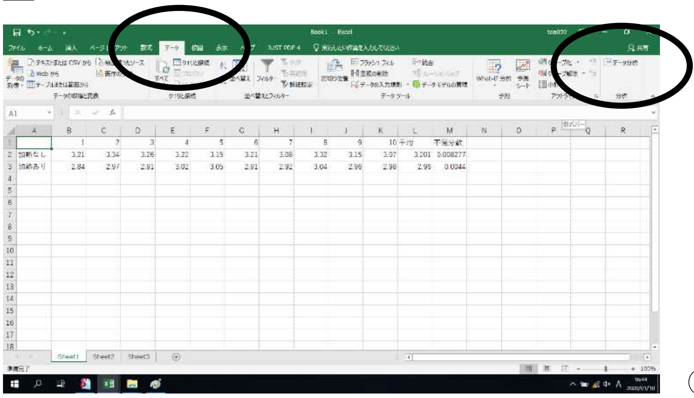


③［アドイン］→［設定］をクリック

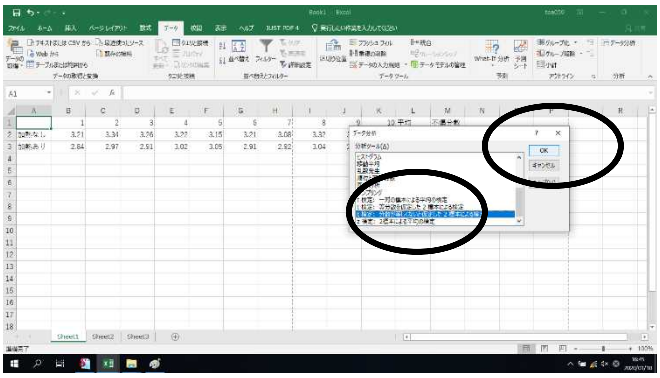


④［分析ツール］チェックボックスをオンにして［OK］をクリック

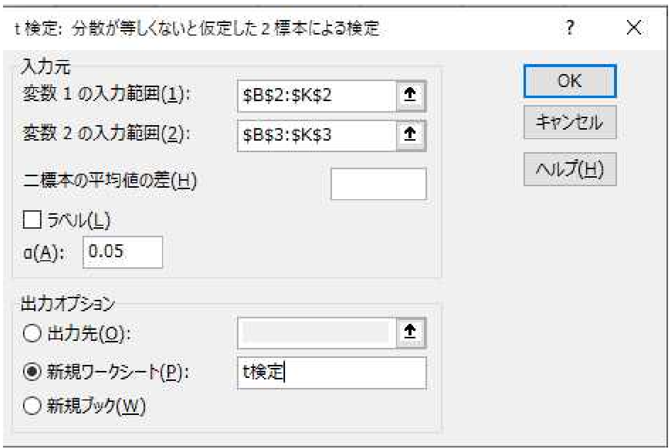
2 読み込んだ分析ツールを利用して t 検定を行う



①[データ]タブ→[分析ツール]をクリック



②[t 検定：分散が等しくないと仮定した 2 標本による検定]を選択し，[OK]をクリック



③変数 1 の入力範囲：加熱なしのデータ範囲

④変数 1 の入力範囲：加熱ありのデータ範囲

⑤α ：有意水準 5 %の検定

⑥出力オプション：t 検定という名前のシートに結果を出力する

→[OK]をクリック

3　検定結果

	A	B	C	D
1	t-検定: 分散が等しくないと仮定した２標本による検定			
2				
3		変数 1	変数 2	
4	平均	3.201	2.96	
5	分散	0.008277	0.0044	
6	観測数	10	10	
7	仮説平均との差異	0		
8	自由度	16		
9	t	6.768844		
10	P(T<=t) 片側	2.25E-06		
11	t 境界値 片側	1.745884		
12	P(T<=t) 両側	4.51E-06		
13	t 境界値 両側	2.119905		

太枠の数値を記入し，Excel を利用した t 検定①で求めた数値と一致することを確かめよう。

① 分散：標本を元に計算された、母集団の分散の推定値（不偏分散）

② 自由度：分散が等しくないと仮定した２標本による検定（Welch 検定）のため、正確には小数点以下も数値があるが、Excel 上では四捨五入された整数値が表示される。

③ P(T<=t)片側：帰無仮説が真であるとしたときに、このデータが得られる確率

$2.25\mathrm{E}-06 \ = \ 2.25 \times 10^{-6} = 0.00000225(= 0.000225\%)$

有意水準 0.05(5%)より小さくなっています。つまり、２つのデータの平均が等しいという仮説の域に入らない（棄却域に入る）ため、帰無仮説は棄却され，２つのデータの平均には有意な差があることがわかります。

④ t 境界値片側：片側検定で有意差が認められる境界値

1.745884 に対して、与えられたデータから計算した t 値が 6.7888844 となり、境界値よりも大きくなっています。つまり、２つのデータの平均値が等しいという仮説の域に入らない（棄却域に入る）ため、帰無仮説は棄却され，２つのデータの平均には有意な差があることがわかります。